# 1次元コンパクト距離空間の積空間へ埋め込めないコンパクト距離空間について (一般・幾何学的位相における未解決問題とその展開)



小山, 晃

数理解析研究所講究録
1107巻 1999年 41-45



# 1次元コンパクト距離空間の積空間へ埋め込めないコンパクト距離空間について

大阪教育大学数理科学　小山　晃 (Akira KOYAMA)

変わった表題だが、どんな $n$ 次元コンパクト距離空間が $n$ 個の1次元コンパクト距離空間の積空間へ埋め込めることができるか否かを考えることを目的としている。何故 $n$ 個にこだわるかというと、$n$ 次元距離空間の universal 空間との関連で次の結果が知られている：

**定理 1 (Lipscomb,1975)** 任意の濃度 $\mathbf{m} \geq \aleph_0$ について、次の条件：

(∗)　$\omega(X) = \mathbf{m}$ である任意の $n$ 次元距離空間 $X$ は、
直積空間 $L(\mathbf{m})^{n+1}$ へ埋め込むことができる

を満たす $\dim L(\mathbf{m}) = 1$ かつ $\omega(L(\mathbf{m})) = \mathbf{m}$ である距離空間 $L(\mathbf{m})$ が存在する。

さらに、最近 Olszewski[O], が、簡単な証明を与えるとともに、$L(\mathbf{m})^{n+1}$ は $\dim \leq n$ かつ $weight \leq \mathbf{m}$ である距離空間の universal space を含むことを示した。

歴史的にこの手の結果を見てみると、Nagata[$\mathrm{Na}_1$] が

**定理 2** 任意の $n$ 次元距離空間 $X$ は、$n+1$ 個の1次元距離空間の直積空間へ埋め込むことができる。

を示し、その先鞭を付けている。そうして Nagata はその著書 [$\mathrm{Na}_2$] で

**問題 3** 任意の $n$ 次元距離空間 $X$ は、$n$ 個の1次元距離空間の直積空間へ埋め込むことができるか？

という問題を提出している。この問題は、例えば、トーラス $T = S^1 \times S^1$ はそれ自身 1 次元空間の直積であり、一般に、種数$\geq 1$ の向き付け可能な 2 次元コンパクト多様体は 2 個の 1 次元多面体（=コンパクト グラフ）の直積空間へ埋め込むことができる；という簡単な事実を考えれば自然なものであった。ところがこの問題は、Borsuk[Bo] によって次の結果が示され、否定的に解かれた。

**定理 4** 2 次元球面 $S^2$ はどんな 2 つの 1 次元距離空間の直積空間へも埋め込むことができない。

これはちょっと皮肉なことで、2 次元球面は最も簡単なコンパクト 2 次元多様体、これが埋め込めず、それほかの向き付け可能なコンパクト 2 次元多様体は埋め込めるという状況になっている。。一方、最近 Dranishnikov[Dr] は “fractal Riemann surfaces” という Pontrjagin の 2 次元連続体関連した十分に複雑と思われる空間が 2 個の 1 次元コンパクト距離空間の直積空間へ埋め込むことができることを示している。直積空間を考える 1 次元連続体がなんでもよいというところにトリックがあるが、$n$ 個の 1 次元距離空間の直積空間に埋め込むことができる $n$ 次元空間が構造的な簡単さをもつとは限らないことに注意しておこう。

ここでは Borsuk の方法を精密化して $n$ 次元距離空間について、「どんな $n$ 個の 1 次元距離空間の直積空間へも埋め込むことができない」という性質についての判定法を与えよう。

**補題 5** コンパクト距離空間 $X$と自明でない可換群 $G$ について、$\check{H}^1(X;G) = 0$ ならば、任意の連続写像 $f : X \to Y_1 \times \cdots \times Y_n$、ただし、$Y_i, i = 1, \ldots, n$ は 1 次元コンパクト距離空間とする、に対して、誘導された準同型写像　$f^* : \check{H}^n(Y_1 \times \cdots \times Y_n; G) \to \check{H}^n(X;G)$　は自明である。

**証明のアイデア:** $f$を各座標ごとに表示して $f = (f_1, \cdots, f_n) : X \to Y_1 \times \cdots \times Y_n$ と表す。このとき、$f$は次の合成によって表現されていると考えてよい：

$$X \xrightarrow{\Delta} X_1 \times \cdots \times X_n \xrightarrow{f_1 \times \cdots \times f_n} Y_1 \times \cdots \times Y_n ,$$

ただし、$\Delta$は、$\Delta(x) = (x, \ldots, x),\ x \in X,$ で与えられる対角線写像とする。

そこで Künneth Formula を考えると、各 $Y_i, i = 1, \ldots, n$ は 1 次元だから次の可換な図式に帰結される：

$$\begin{tikzcd}
\check{H}^1(X;G)\otimes\cdots\otimes\check{H}^1(X;G) \arrow[r] & \check{H}^n(X\times\cdots\times X;G) \\
\check{H}^1(Y_1;G)\otimes\cdots\otimes\check{H}^1(Y_n;G) \arrow[u, "f_1^*\otimes\cdots\otimes f_n^*"] \arrow[r, "\cong"'] & \check{H}^n(Y_1\times\cdots\times Y_n;G) \arrow[u, "(f_1\times\cdots\times f_n)^*"']
\end{tikzcd}$$

仮定から $\check{H}^1(X;G)=0$ だから $f_1^*\otimes\cdots\otimes f_n^*=0$ となるので

$$0=(f_1\times\cdots\times f_n)^*:\check{H}^n(Y_1\times\cdots\times Y_n;G)\to\check{H}^n(X\times\cdots\times X;G)$$

よって、$f^*=0$ であることがわかる。

この結果を利用すると簡単に次のことがわかる：

**定理 6** $n$ 次元コンパクト距離空間 $X$が、ある可換群 $G$ について：

$$\check{H}^1(X;G)=0 \quad かつ \quad \check{H}^n(X;G)\neq 0$$

ならば、$X$はどんな $n$ 個の 1 次元コンパクト距離空間の直積空間へも埋め込むことができない。

この判定法を用いることによって Borsuk の結果を精密化した次のことがわかる：

**系 7** $S^n$-*like* である $n$ 次元コンパクト距離空間が $n$ 個の 1 次元コンパクト距離空間の直積空間へ埋め込むことができる必要十分条件は *trivial shape* を持つことである。

普通は簡単な形をした整数群か有限巡回群を用いるが、ここで判定に用いたか可換群 $G$ に特別な制限がないこと、すなわち、どんな群でもうまく自明になったりならなかったりすることがわかればいいことに注意しておく。

係数群を注意したついでに整係数群の自明性に関連した注意を付加しておく。1 次元コホモロジー群は torsion free だから、その有限性と自明性は同値である。よって、係数普遍定理との関係で有限性をホモロジー限で表現することを考えた。そのために shape 理論で知られている次の概念を導入しておく。pro-group$\mathbf{G}=\{G_\lambda,g_{\lambda,\lambda'}\Lambda\}$

が" pro-generated by elements of finite order" であるとは；任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、$\mathrm{Im}(g_{\lambda,\lambda'})$ が finite oder の元によって生成されるという $\lambda' \geq \lambda$ が存在することをいう。また、G が pro-finite であるとは；任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、$\mathrm{Im}(g_{\lambda,\lambda'})$ が有限となる $\lambda' \geq \lambda$ が存在することをいう。

**定理 8** 基点を持つ連続体 $(X, x_0)$ について次の命題を考える：

*(1) pro-$\pi_1(X, x_0)$ が pro-generated by elements of finite order,*

*(2) pro-$H_1(X)$ が pro-finite,*

*(3) $\check{H}^1(X)$ が自明.*

このとき、(1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) である。
一般に、(2) $\Longrightarrow$ (1) は成立しない。

非埋蔵性の条件は (3) に近いわけだが、条件 (1) からは次の定理6 よりちょっと強いことがわかる：

**定理 9** 基点を持つ連続体 $(X, x_0)$ について, *pro-$\pi_1(X, x_0)$ が pro-generated by elements of finite order* ならば、任意の 1 次元連続体への *shape morphism* $\mathbf{f}: X \to Y$ は自明である。

# 参考文献

[Bo] K. Borsuk, *Remarks on the Cartesian product of two 1-dimensional spaces*, Bull. Pol. Acad. Sci. **23**(1975), 971–973.

[Dr] A. N. Dranishnikov, *On problem of Y.Sternfeld*, Glasnik Mat. **27**(**47**)(1992), 365–368.

[Li] S. L. Lipscomb, *On imbedding finite-dimensional metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **21**(1974), 143–160.

[$Na_1$] J. Nagata, *Note on dimension theory for metric spaces*, Fund. Math. **45**(1958), 143–181.

[$Na_2$] J. Nagata, *Modern dimension theory*, North-Holland, Amsterdam, 1965.

[O] W. Olszewski, *Embedding of finite-dimensional metric spaces into finite product of* 1*-dimensional spaces*, Topology and its Appl. **40**(1991), 93–99.